

27.11.23 т 8св

Математика

Тема: « Производная» (конспект)

### 1 урок

Пусть  $x$  — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки  $x_0$ . Разность  $x - x_0$  называется *приращением независимой переменной* (или *приращением аргумента*) в точке  $x_0$  и обозначается  $\Delta x$ . Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0,$$

откуда следует, что  $x = x_0 + \Delta x$ .

Говорят также, что первоначальное значение аргумента  $x_0$  получило приращение  $\Delta x$ . Вследствие этого значение функции  $f$  изменится на величину

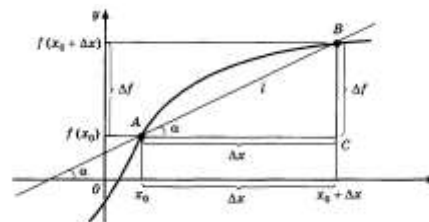
$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эта разность называется *приращением функции  $f$  в точке  $x_0$* , соответствующим приращению  $\Delta x$ , и обозначается символом  $\Delta f$  (читается «дельта эф»), т. е. по определению

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad (1)$$

откуда

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$



**Определение.** Производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при  $\Delta x$ , стремящемся к нулю.

Производная функции  $f$  в точке  $x_0$  обозначается  $f'(x_0)$  (читается: «Эф штрих от  $x_0$ »).

■ **Пример 1.** Найдем производную функции  $f(x) = x^3$  в точке  $x_0$ .

Будем действовать по описанной выше схеме.

1)  $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$

2)  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \quad (\Delta x \neq 0).$

3) Теперь заметим, что слагаемое  $3x_0^2$  постоянно, а при  $\Delta x \rightarrow 0$  очевидно, что  $3x_0 \Delta x \rightarrow 0$  и  $(\Delta x)^2 \rightarrow 0$ , а значит, и  $3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \rightarrow 0$ . Получаем:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3x_0^2 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$f'(x_0) = 3x_0^2.$$

**Пример 2.** Найдем производную функции  $f(x) = kx + b$  ( $k$  и  $b$  постоянны) в точке  $x_0$ .

1)  $\Delta f = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x.$

2)  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = k.$

3) Поскольку  $k$  — постоянная,  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  — постоянное число при любом  $\Delta x$ , и, значит,  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow k$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Итак,  $(kx + b)' = k.$

Таким образом можно найти производные всех элементарных функций.  
Получаем таблицу:

$f(x)$	$f'(x)$
$C - \text{const}$	$0$
$x$	$1$
$Kx + b$	$k$
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$\ln a$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

## 2 урок

### «Правила дифференцирования»

#### Правила вычисления производных

1. $(U + Y)' = U' + Y'$	3. $(U \cdot Y)' = U' \cdot Y + U \cdot Y'$
2. $(k \cdot U)' = k \cdot (U)'$	4. $\left[ \frac{U}{Y} \right]' = \left[ \frac{U' \cdot Y - U \cdot Y'}{Y^2} \right]$

